Přehled základních metod georeferencování starých map

Jiří Cajthaml

ČVUT v Praze, Fakulta stavební, katedra mapování a kartografie

4. listopadu 2011

Obsah prezentace

Georeferencování starých map

- Zhlediska georeferencování jsou důležité zejména následující vstupní parametry starých map:
    - počet mapových listů (jeden nebo více)
    - znalost použitého souřadnicového systému
        - geodetické datum (elipsoid, nultý poledník)
        - kartografické zobrazení včetně všech parametrů
    - znalost originálních rozměrů mapových listů

Transformace souřadnic v rovině

- globální transformační metody
  - jednotný transformační klíč pro celou mapu
  - podobnostní transformace
  - 5-ti prvková afinní transformace
  - afinní transformace
  - projektivní transformace
  - polynomické transformace (2. a 3. stupně)

Transformace souřadnic v rovině

- lokální transformační metody
  - transformační klíč se mění v ploše
  - většinou založeno na vzdálenosti od identických bodů
  - prakticky využívá interpolačních metod
  - Inverse Distance Weigted (IDW)
  - Thin Plate Spline (TPS)
- metody založené na dělení prostoru
  - po trojúhelnících (afinní transformace)
  - po čtyřúhelnících (projektivní transformace)

Podobnostní transformace

$$
\begin{aligned}
x' &= m\cos(\omega)x - m\sin(\omega)y + X_t\,, \\
y' &= m\sin(\omega)x + m\cos(\omega)y + Y_t\,.
\end{aligned}
$$

- posun, rotace, změna měřítka
- 4 neznámé (min. 2 identické body)
- často se používá substituce:

$$
\begin{aligned}
x' &= ax - by + X_t\,, \\
y' &= bx + ay + Y_t\,.
\end{aligned}
$$

5-ti prvková afinní transformace

$$
\begin{aligned}
x' &= m_x \cos(\omega) x - m_y \sin(\omega) y + X_t \,, \\
y' &= m_x \sin(\omega) x + m_y \cos(\omega) y + Y_t \,.
\end{aligned}
$$

- posun, rotace, změna měřítka ve dvou osách
- 5 neznámých (min. 3 identické body)

Afinní transformace

$$
\begin{aligned}
x' &= m_x \cos(\omega_x) x - m_y \sin(\omega_y) y + X_t \, , \\
y' &= m_x \sin(\omega_x) x + m_y \cos(\omega_y) y + Y_t \, .
\end{aligned}
$$

- posun, rotace ve dvou osách, změna měřítka ve dvou osách
- 6 neznámých (min. 3 identické body)
- často se používá substituce:

$$
\begin{aligned}
x' &= ax + by + X_t \, , \\
y' &= cx + dy + Y_t \, .
\end{aligned}
$$

Projektivní transformace

$$x' = \frac{ax + by + c}{gx + hy + 1},$$
$$y' = \frac{dx + ey + f}{gx + hy + 1}.$$

- transformace „čtyřúhelníku na čtyřúhelník“
- 8 neznámých (min. 4 identické body)

Polynomická transformace 2. stupně

$$
\begin{aligned}
x' &= ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f \,, \\
y' &= gx^2 + hy^2 + ixy + jx + ky + l \,.
\end{aligned}
$$

- 12 neznámých (min. 6 identických bodů)

Polynomická transformace 3. stupně

$$
\begin{aligned}
x' &= ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 + ex^2 + fy^2 + gxy + hx + iy + j\,,\\
y' &= kx^3 + ly^3 + mx^2y + nxy^2 + ox^2 + py^2 + qxy + rx + sy + t\,.
\end{aligned}
$$

- 20 neznámých (min. 10 identických bodů)

Inverse Distance Weigted

$$x' = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i . x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}, y' = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i . y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i},$$

kde w_i je váha příslušného identického bodu a x_i, y_i jsou hodnoty (souřadnice, odchylky) tohoto bodu. Již podle názvu metody jsou váhy určovány na základě inverzních vzdáleností určovaného bodu a identického bodu:

$$w_i = \frac{1}{r_i^p}.$$

Thin Plate Spline

$$
\begin{aligned}
x' &= a_x + b_x x + c_x y + \sum_{i=1}^{n} w_{xi} . r_i^2 . \ln r_i^2 \, , \\
y' &= a_y + b_y x + c_y y + \sum_{i=1}^{n} w_{yi} . r_i^2 . \ln r_i^2 \, .
\end{aligned}
$$

Koeficienty w_i jsou navíc svázány podmínkami:

$$
\sum_{i=1}^{n} w_{xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i . w_{xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i . w_{xi} = 0 \, ,
$$

$$
\sum_{i=1}^{n} w_{yi} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i . w_{yi} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i . w_{yi} = 0 \, .
$$

Pro každou souřadnici (x, y) tedy dostáváme celkem $n + 3$ lineárních rovnic, kde n je počet identických bodů.

Identické body

- ideální co nejvíc
- velmi důležité jejich prostorové rozložení
- musí pokrývat souvisle zájmovou oblast
- ideálně rovnoměrná hustota
- u lokálních transformačních metod je výpočet vždy stejný, nezávislý na počtu identických bodů
- u globálních transformačních metod je výpočet při nadbytečném počtu identických bodů řešen pomocí vyrovnání transformačních koeficientů metodou nejmenších čtverců (MNČ)

Vyrovnání zprostředkujících měření

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \bar{\mathbf{l}} \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \mathbf{l} + \mathbf{v} \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + \mathbf{dx}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x_0}) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\bigg\|_{\mathbf{x}=\mathbf{x_0}} .\mathbf{dx} = \mathbf{l} + \mathbf{v}$$

$$\mathbf{l}' = \mathbf{F}(\mathbf{x_0}) - \mathbf{l}$$

Po úpravě dostáváme linearizované rovnice oprav:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\bigg\|_{\mathbf{x}=\mathbf{x_0}} .\mathbf{dx} + \mathbf{l}'$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}.\mathbf{dx} + \mathbf{l}'$$

Vyrovnání zprostředkujících měření

Jsou-li neznámé ve vztazích $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ přímo lineární a separované nebo provedeme-li vhodnou substituci těchto vztahů (např. transformační koeficienty nevolíme přímo jako geometrické parametry) nemusíme použít Taylorova rozvoje. Poté se vztahy trochu zjednoduší:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}.\mathbf{x} = \mathbf{l} + \mathbf{v}$$

Po úpravě dostáváme přímo lineární rovnice oprav:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}.\mathbf{x} - \mathbf{l}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}.\mathbf{x} - \mathbf{l}$$

Metoda nejmenších čtverců

Po aplikaci metody nejmenších čtverců získáváme pro vyrovnané přírůstky neznámých vztah:

$$\mathbf{dx} = -(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{l}'),$$

případně přímo vztah pro vyrovnané neznámé (pokud jsou lineární a separované v $\mathbf{F}(\mathbf{x})$):

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{l}).$$

Afinní transformace

$$
\begin{aligned}
x' &= m_x \cos(\omega_x) x - m_y \sin(\omega_y) y + X_t \\
y' &= m_x \sin(\omega_x) x + m_y \cos(\omega_y) y + Y_t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x' &= ax + by + X_t \\
y' &= cx + dy + Y_t
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ X_t \\ Y_t \end{pmatrix}
$$

Afinní transformace

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & y_1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & x_n & y_n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Kategorie georeferencovaných map

- 1 mapový list, neznámé zobrazení, neznámé rozměry
- 1 mapový list, neznámé zobrazení, známé rozměry
- 1 mapový list, známé zobrazení, neznámé rozměry
- 1 mapový list, známé zobrazení, známé rozměry
- více mapových listů, neznámé zobrazení, neznámé rozměry
- více mapových listů, neznámé zobrazení, známé rozměry
- více mapových listů, známé zobrazení, neznámé rozměry
- více mapových listů, známé zobrazení, známé rozměry

1 mapový list, neznámé zobrazení, neznámé rozměry

- nejčastější u velmi starých map, rukopisných map
- sběr identických bodů v zeměpisných souřadnicích
- afinní nebo 5-ti prvková afinní transformace, příp. polynomická
- nebo použití lokálních metod
- např. nejstarší mapy českých zemí (Klaudyánova, Crigingerova atd.)

1 mapový list, neznámé zobrazení, známé rozměry

- nejčastější u velmi starých map, pokud známe rozměry
- rozměry se dají zjistit přímo z rozměrů tiskových desek a nebo z literatury
- nejdříve rekonstrukce původních rozměrů mapy
- sběr identických bodů v zeměpisných souřadnicích
- podobnostní transformace (již nepotřebujeme opravit srážku)
- např. staré mapy, ke kterým se dochovaly tiskové desky

1 mapový list, známé zobrazení, neznámé rozměry

- pokud známe kartografické zobrazení, je ideální pracovat přímo v něm, aby se mapa nedeformovala georeferencováním v jiném souřadnicovém systému
- sběr identických bodů v rovinných souřadnicích známého zobrazení
- afinní nebo 5-ti prvková afinní transformace, příp. polynomická
- nebo použití lokálních metod
- např. staré mapy s informací o použitém zobrazení i jeho parametrech, ale deformované neznámou srážkou analogového média

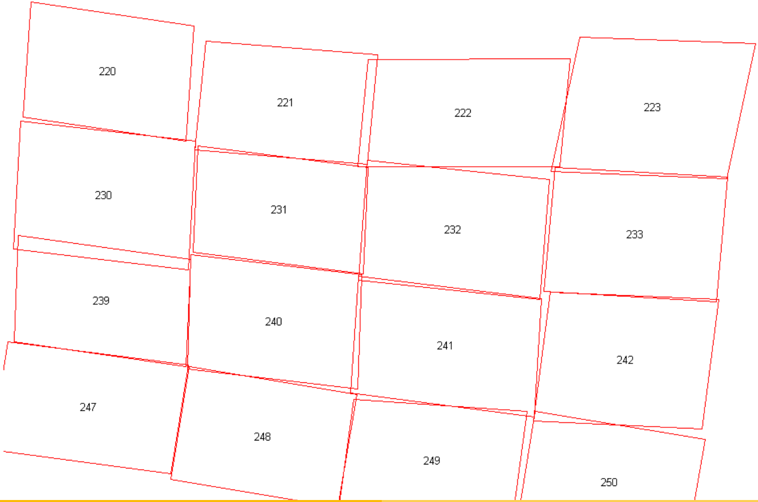
1 mapový list, známé zobrazení, známé rozměry

- pokud známe kartografické zobrazení i rozměry mapy, jsme schopni vypočítat souřadnice rohů mapy v použitém souřadnicovém systému
- projektivní transformace na 4 rohy (nereziduální)
- např. novější mapy se známými údaji o tvorbě díla a záměrech autora

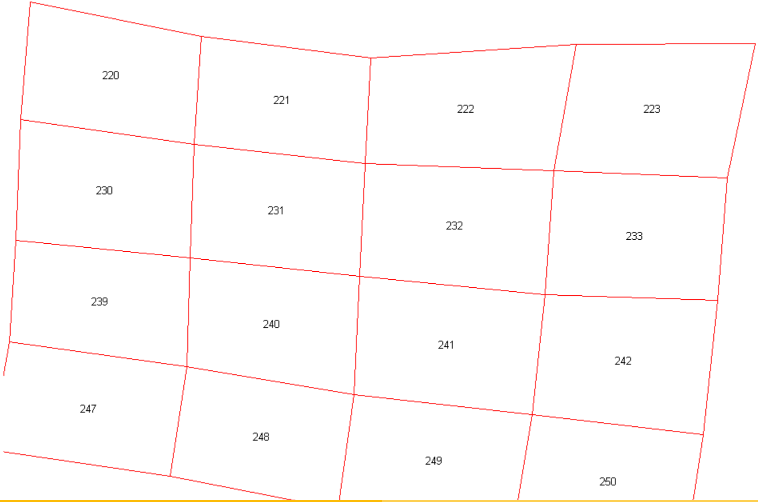
Více mapových listů, neznámé zobrazení, neznámé rozměry

- nejčastější u velmi starých map, rukopisných map
- sběr identických bodů v zeměpisných souřadnicích
- afinní nebo 5-ti prvková afinní transformace (příp. polynomická) jednotlivých listů zvlášť
- poté průměrování souřadnic rohů mapových listů (a projektivní transformace na průměrované rohy) a nebo společné vyrovnání afinní (příp. polynomické) transformace s podmínkami návazností hran
- např. I. vojenské mapování

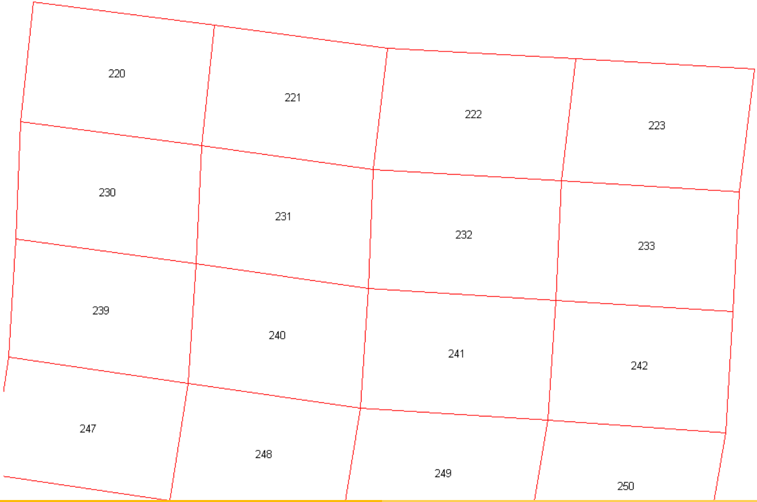
Afinní transformace zvlášť po listech



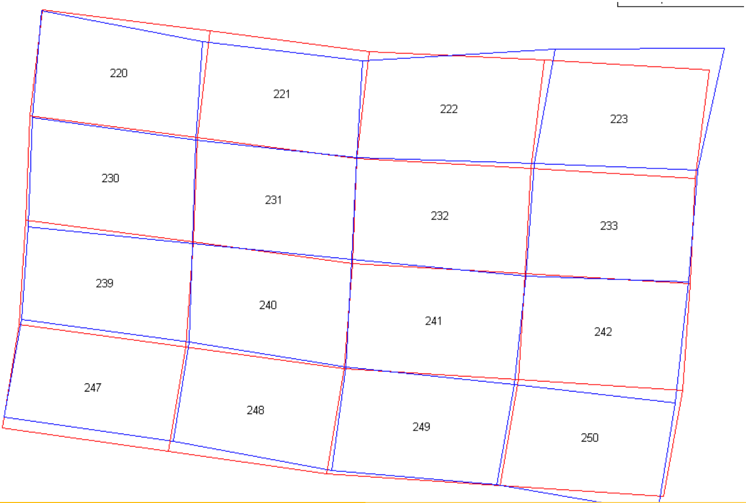
Afinní transformace zvlášť po průměrování rohů



Afinní transformace po společném vyrovnání



Porovnání afinních transformací



Více mapových listů, neznámé zobrazení, známé rozměry

- nejčastější u velmi starých map se známými rozměry (např. z tiskových desek)
- rekonstrukce originálních rozměrů mapy
- sběr identických bodů v zeměpisných souřadnicích
- podobnostní transformace jednotlivých listů zvlášť
- poté průměrování souřadnic rohů mapových listů (a projektivní transformace na průměrované rohy) a nebo společné vyrovnání podobnostní transformace s podmínkami návazností hran (musí jít složit k sobě)
- např. Müllerova mapa Čech (25 listů)

Více mapových listů, známé zobrazení, neznámé rozměry

- pokud známe kartografické zobrazení, je ideální pracovat přímo v něm, aby se mapa nedeformovala georeferencováním v jiném souřadnicovém systému
- sběr identických bodů v rovinných souřadnicích známého zobrazení
- afinní nebo 5-ti prvková afinní transformace (příp. polynomická) jednotlivých listů zvlášť
- poté průměrování souřadnic rohů mapových listů (a projektivní transformace na průměrované rohy) a nebo společné vyrovnání afinní (příp. polynomické) transformace s podmínkami návaznosti hran

Více mapových listů, známé zobrazení, známé rozměry

- pokud známe kartografické zobrazení i rozměry mapy, jsme schopni vypočítat souřadnice rohů mapy v použitém souřadnicovém systému
- projektivní transformace na 4 rohy (nereziduální), listy na sebe sedí
- např. novější mapová díla (novodobá vojenská mapování)

Alternativní postupy

- při neznámých parametrech kartografického zobrazení odvodit globální transformační klíč založený na identitě bodů použitých k tvorbě mapy (triangulace) a poté vypočítat souřadnice rohů mapových listů (dále už jen projektivní transformace)
- před georeferencováním využití plátování, kdy jsou obecně 4 okrajové křivky mapy převedeny na jiné 4 křivky (či přímky), které odpovídají ideálnímu tvaru mapy (vyřeší nelineární tvar okrajů mapu – prohnutí rámů)
- řešení návaznosti nejenom samotných hran mapových listů, ale i návaznosti kresby (pak je ale nutné obraz deformovat v okrajových částech tak, aby si kresba odpovídala)

Děkuji za pozornost!

jiri.cajthaml@fsv.cvut.cz